Semana 7

- Se sugiere antes de resolver los ejercicios ver los videos de YouTube de los temas correspondientes así como también leer la bibliografía recomendada y el material teórico subido en el campus del curso.
- A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos y algunas observaciones para resolver los ejercicios 21 a 28 de la Guía 2. Los ejercicios propuestos que no están en la guía (pero que se relacionan con los mismos) no tienen numeración.

Esta semana empezaremos estudiando un conjunto de transformaciones lineales con muchas aplicaciones y muy importantes: los proyectores.

Proyectores

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ dos subespacios complementarios de $\mathbb{V}$, es decir

$$\mathbb{V} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2.$$

Entonces, a cada $v \in \mathbb{V}$ le corresponden únicos $v_1 \in \mathcal{S}_1$, $v_2 \in \mathcal{S}_2$ tales que

$$v = v_1 + v_2.$$

La *proyección de* $\mathbb{V}$ *sobre* $\mathcal{S}_1$ *en la dirección de* $\mathcal{S}_2$, denotada por $\Pi_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$, es la transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ definida por

$$\Pi_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(v) := v_1.$$

Antes de resolver el **Ejercicio 24**, veamos un ejemplo.

Ejemplo 1 : En $\mathbb{R}^3$, sean $\mathcal{S}_1 := gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ y $\mathcal{S}_2 := gen\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$. Claramente,

$$\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2 = \mathbb{R}^3$$

y, $B = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida en la base B como

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, $T = \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$, la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathcal{S}_1$ en la dirección de $\mathcal{S}_2$.

Observar que $Im(T) = \mathcal{S}_1 = gen\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$ y $Nu(T) = \mathcal{S}_2 = gen\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$.
Ahora sí, vamos a resolver item por item el **Ejercicio 24**.

Ejercicio 24:

a) Explicar por qué $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$ es la única TL de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ tal que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = v$ si $v \in \mathcal{S}_1$ y $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = 0_{\mathbb{V}}$, si $v \in \mathcal{S}_2$. Comprobar que

$$Im(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}) \oplus Nu(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}) = \mathbb{V}.$$

Primero veamos que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$ está bien definida y es una TL.

Para ver qué está bien definida, basta ver que a todo elemento del dominio de $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$ (que es $\mathbb{V}$) le corresponde un único elemento del espacio de llegada (que también es $\mathbb{V}$). De hecho, como

$$\mathbb{V} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$$

a cada $v \in \mathbb{V}$ le corresponden únicos $v_1 \in \mathcal{S}_1$, $v_2 \in \mathcal{S}_2$ tales que $v = v_1 + v_2$. Como $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = v_1$, efectivamente $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$ está bien definida.

Veamos que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$ es una TL. Sean $v, w \in \mathbb{V}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces existen únicos $v_1, w_1 \in \mathcal{S}_1$ y $v_2, w_2 \in \mathcal{S}_2$ tales que $v = v_1 + v_2$ y $w = w_1 + w_2$. Entonces, por un lado, por definición de $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$, tenemos que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = v_1$ y $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(w) = w_1$. Por otro lado, observar que

$$v + w = v_1 + v_2 + w_1 + w_2 = (v_1 + w_1) + (w_1 + w_2), \tag{1}$$

además, $v_1 + w_1 \in \mathcal{S}_1$ (porque $\mathcal{S}_1$ es un subespacio) y $v_2 + w_2 \in \mathcal{S}_2$ (porque $\mathcal{S}_2$ es un subespacio). Entonces (1) es la (única) descomposición del vector $v + w$ como suma de elementos de $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$. Por lo tanto

$$\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v + w) = v_1 + w_1 = \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) + \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(w).$$

De manera similar se prueba que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(\alpha v) = \alpha \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v)$ y entonces, probamos que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$ es una transformación lineal.

Veamos que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$ es la única TL que cumple con lo que dice el item a).

Primero, observar que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$ efectivamente cumple lo que dice el item a). Es decir que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = v$ si $v \in \mathcal{S}_1$ y $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = 0_{\mathbb{V}}$, si $v \in \mathcal{S}_2$.

De hecho, si $v \in \mathcal{S}_1$, como $v = v + 0_{\mathbb{V}}$ y $0_{\mathbb{V}} \in \mathcal{S}_2$ (pues $\mathcal{S}_2$ es un subespacio), esa es la única descomposición de v como como suma de elementos de $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$. Entonces, por definición de $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$, tenemos que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = v$. De esa manera, si $v \in \mathcal{S}_2$, entonces $v = 0_{\mathbb{V}} + v$, $0_{\mathbb{V}} \in \mathcal{S}_1$ (pues $\mathcal{S}_1$ es un subespacio) y esa descomposición es única. Entonces, por definición de $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$, tenemos que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = 0_{\mathbb{V}}$.

Finalmente, supongamos que existe $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ tal que $T(v) = v$, si $v \in \mathcal{S}_1$ y $T(v) = 0_{\mathbb{V}}$, si $v \in \mathcal{S}_2$. Veamos que $T = \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$.

De hecho, dado $v \in \mathbb{V}$, existen únicos $v_1 \in \mathcal{S}_1$, $v_2 \in \mathcal{S}_2$ tales que

$$v = v_1 + v_2.$$

Entonces, como $v_1 \in \mathcal{S}_1$, tenemos que $T(v_1) = v_1$ y como $v_2 \in \mathcal{S}_2$, tenemos que $T(v_2) = 0_{\mathbb{V}}$. Además, por definición de $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$, tenemos que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = v_1$. Entonces

$$T(v) = T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = v_1 + 0_{\mathbb{V}} = v_1 = \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v).$$

Como esa igualdad vale para cualquier $v \in \mathbb{V}$, concluimos que $T = \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$.

Por último, veamos que

$$Im(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}) \oplus Nu(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}) = \mathbb{V}.$$

En primer lugar, veamos que $Im(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}) = \mathcal{S}_1$ y que $Nu(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}) = \mathcal{S}_2$, probando la doble inclusión.

Veamos que $Im(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}) = \mathcal{S}_1$.

Si $w \in Im(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2})$, entonces existe $v \in \mathbb{V}$ tal que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = w$. Como $v \in \mathbb{V}$ existen únicos $v_1 \in \mathcal{S}_1$, $v_2 \in \mathcal{S}_2$ tales que $v = v_1 + v_2$ y

$$w = \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = v_1,$$

entonces $w = v_1 \in \mathcal{S}_1$ y vale que $Im(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}) \subseteq \mathcal{S}_1$. Recíprocamente, si $v \in \mathcal{S}_1$, acabamos de ver que

$$\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = v,$$

entonces $v \in Im(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2})$ y probamos que $\mathcal{S}_1 \subseteq Im(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2})$. Como probamos la doble inclusión, se sigue que $Im(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}) = \mathcal{S}_1$.

Veamos que $Nu(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}) = \mathcal{S}_2$.

Si $v \in Nu(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2})$, entonces $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = 0_{\mathbb{V}}$. Como $v \in \mathbb{V}$ existen únicos $v_1 \in \mathcal{S}_1$, $v_2 \in \mathcal{S}_2$ tales que $v = v_1 + v_2$ y

$$0_{\mathbb{V}} = \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = v_1,$$

entonces $v = v_1 + v_2 = 0_{\mathbb{V}} + v_2 = v_2 \in \mathcal{S}_2$ y vale que $Nu(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}) \subseteq \mathcal{S}_2$. Recíprocamente, si $v \in \mathcal{S}_2$, acabamos de ver que

$$\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = 0_{\mathbb{V}},$$

entonces $v \in Nu(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2})$ y probamos que $\mathcal{S}_2 \subseteq Nu(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2})$. Como probamos la doble inclusión, se sigue que $Nu(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}) = \mathcal{S}_2$.

Entonces, usando que $\mathbb{V} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$, concluimos que $Im(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}) \oplus Nu(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}) = \mathbb{V}$.

b) Demostrar que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$ es *idempotente*, es decir, $\Pi^2_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2} = \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$.

Recordar que $\Pi^2_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2} := \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2} \circ \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$. Como tenemos que probar una igualdad de TL, basta ver que la igualdad vale para cada $v \in \mathbb{V}$.

Sea $v \in \mathbb{V}$, entonces existen únicos $v_1 \in \mathcal{S}_1$, $v_2 \in \mathcal{S}_2$ tales que $v = v_1 + v_2$ y por definición de $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$, tenemos que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = v_1$. Ahora, como $v_1 \in \mathcal{S}_1$, vimos en el item a) que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v_1) = v_1$. Juntando todo esto, nos queda que

$$\Pi^2_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v)) = \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v_1) = v_1 = \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v).$$

Como la igualdad anterior vale para todo $v \in \mathbb{V}$, concluimos que $\Pi^2_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2} = \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$.

c) Observar que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2} + \Pi_{\mathcal{S}_2,\, \mathcal{S}_1} = I_{\mathbb{V}}$, o lo que es lo mismo, $\Pi_{\mathcal{S}_2,\, \mathcal{S}_1} = I_{\mathbb{V}} - \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$.

Como tenemos que probar una igualdad de TL, basta ver que la igualdad vale para cada $v \in \mathbb{V}$. Sea $v \in \mathbb{V}$, entonces existen únicos $v_1 \in \mathcal{S}_1$, $v_2 \in \mathcal{S}_2$ tales que $v = v_1 + v_2$ y por definición de $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$ y $\Pi_{\mathcal{S}_2,\, \mathcal{S}_1}$, tenemos que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = v_1$ y $\Pi_{\mathcal{S}_2,\, \mathcal{S}_1}(v) = v_2$. Entonces

$$[\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2} + \Pi_{\mathcal{S}_2,\, \mathcal{S}_1}](v) = \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) + \Pi_{\mathcal{S}_2,\, \mathcal{S}_1}(v) = v_1 + v_2 = v = I_{\mathbb{V}}(v).$$

Como la igualdad anterior vale para todo $v \in \mathbb{V}$, concluimos que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2} + \Pi_{\mathcal{S}_2,\, \mathcal{S}_1} = I_{\mathbb{V}}$.

d) Mostrar que

$$\Sigma_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2} := I_{\mathbb{V}} - 2\Pi_{\mathcal{S}_2,\, \mathcal{S}_1}$$

es la única transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ tal que $\Sigma_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = v$, si $v \in \mathcal{S}_1$, y $\Sigma_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = -v$, si $v \in \mathcal{S}_2$. A la transformación lineal $\Sigma_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$ se la denomina la *simetría de* $\mathbb{V}$ *respecto de* $\mathcal{S}_1$ *en la dirección* $\mathcal{S}_2$.

Dejo de ejercicio ver que $\Sigma_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$ está bien definida y que es una TL.

Veamos que efectivamente $\Sigma_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = v$, si $v \in \mathcal{S}_1$, y $\Sigma_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = -v$, si $v \in \mathcal{S}_2$.

Ya vimos que si $v \in \mathcal{S}_1$ entonces $\Pi_{\mathcal{S}_2,\, \mathcal{S}_1}(v) = 0_{\mathbb{V}}$ y si $v \in \mathcal{S}_2$ entonces $\Pi_{\mathcal{S}_2,\, \mathcal{S}_1}(v) = v$. Por lo tanto, si $v \in \mathcal{S}_1$,

$$\Sigma_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = I_{\mathbb{V}}(v) - 2\ \Pi_{\mathcal{S}_2,\, \mathcal{S}_1}(v) = v - 2\ 0_{\mathbb{V}} = v.$$

Finalmente, si $v \in \mathcal{S}_2$,

$$\Sigma_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = I_{\mathbb{V}}(v) - 2\Pi_{\mathcal{S}_2,\, \mathcal{S}_1}(v) = v - 2v = -v.$$

Y probamos lo que queríamos.

Por último, supongamos que existe $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ tal que $S(v) = v$, si $v \in \mathcal{S}_1$ y $S(v) = -v$, si $v \in \mathcal{S}_2$. Veamos que $T = \Sigma_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$.

De hecho, dado $v \in \mathbb{V}$, existen únicos $v_1 \in \mathcal{S}_1$, $v_2 \in \mathcal{S}_2$ tales que

$$v = v_1 + v_2.$$

Entonces, como $v_1 \in \mathcal{S}_1$, tenemos que $S(v_1) = v_1$ y como $v_2 \in \mathcal{S}_2$, tenemos que $S(v_2) = -v_2$. Además, por definición de $\Sigma_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$, tenemos que

$$\Sigma_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v) = v - 2\Pi_{\mathcal{S}_2,\, \mathcal{S}_1}(v) = v_1 + v_2 - 2v_2 = v_1 - v_2.$$

Entonces

$$S(v) = S(v_1 + v_2) = S(v_1) + S(v_2) = v_1 - v_2 = \Sigma_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v).$$

Como esa igualdad vale para cualquier $v \in \mathbb{V}$, concluimos que $S = \Sigma_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$.

d) Probar que $\Sigma^2_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2} = I_{\mathbb{V}}$.

Sea $v \in \mathbb{V}$, entonces existen únicos $v_1 \in \mathcal{S}_1$, $v_2 \in \mathcal{S}_2$ tales que $v = v_1 + v_2$ y por definición de $\Sigma_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}$, tenemos que

$$\Sigma_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}(v) = v - 2\Pi_{\mathcal{S}_2,\,\mathcal{S}_1}(v) = v_1 + v_2 - 2v_2 = v_1 - v_2.$$

Ahora, como $v_1 \in \mathcal{S}_1$, vimos en el item d) que $\Sigma_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}(v_1) = v_1$ y como $v_2 \in \mathcal{S}_2$, vimos en el item d) que $\Sigma_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}(v_2) = -v_2$. Juntando todo esto, nos queda que

$$\Sigma^2_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}(v) = \Sigma_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}(\Sigma_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}(v)) = \Sigma_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}(v_1 - v_2) = \Sigma_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}(v_1) - \Sigma_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}(v_2) =$$

$$= v_1 - (-v_2) = v_1 + v_2 = v = I_{\mathbb{V}}(v).$$

Como la igualdad anterior vale para todo $v \in \mathbb{V}$, concluimos que $\Sigma^2_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2} = I_{\mathbb{V}}$.

La siguiente propiedad la usaremos para probar el **Ejercicio 25** y se podrá usar para resolver el **Ejercicio 28**.

Proposición 1. *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial de dimensión* n *y* $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ *dos subespacios complementarios de* $\mathbb{V}$*, es decir*

$$\mathbb{V} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2.$$

Supongamos que $\dim(\mathcal{S}_1) = r$ *y* $B = \{v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n\}$ *es una base de* $\mathbb{V}$ *donde* $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ *es una base de* $\mathcal{S}_1$ *y* $\{v_{r+1}, \cdots, v_n\}$ *es una base de* $\mathcal{S}_2$*. Entonces*

$$[\Pi_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}]^B_B = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0_{r\times n-r} \\ 0_{n-r\times r} & 0_{n-r\times n-r} \end{bmatrix}.$$

$$[\Sigma_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}]^B_B = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0_{r\times n-r} \\ 0_{n-r\times r} & -I_{n-r\times n-r} \end{bmatrix}.$$

Donde $I_{r\times r}$ *denota la matriz identidad de* $r \times r$*,* $0_{r\times n-r}$ *la matriz nula de* $r \times n - r$*, etc.*

Dem. En el ejercicio anterior, vimos que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}(v) = v$ si $v \in \mathcal{S}_1$ y $\Pi_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}(v) = 0_{\mathbb{V}}$, si $v \in \mathcal{S}_2$. Entonces

$$\Pi_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}(v_i) = v_i, \text{ para todo } i = 1, 2, \cdots, r \text{ y } \Pi_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}(v_i) = 0_{\mathbb{V}} \text{ para todo } i = r+1, r+2, \cdots, n.$$

Recordemos además que $[v_i]^B = e_i$, donde e_i es el vector i-ésimo de la base canónica de $\mathbb{K}^n$, es decir el vector de $\mathbb{K}^n$ con todas componentes nulas excepto en el lugar i donde vale 1. Por ejemplo,

$$[v_1]^B = [1\ 0 \cdots\ 0]^T = e_1.$$

Por lo tanto, por definición de $[\Pi_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}]^B_B$, tenemos que

$$[\Pi_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}]^B_B = [\ [\Pi_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}(v_1)]^B\ [\Pi_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}(v_2)]^B \cdots\ [\Pi_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}(v_r)]^B\ [\Pi_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}(v_{r+1})]^B\ \cdots\ [\Pi_{\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}(v_n)]^B\ ] =$$

$$= [\ [v_1]^B\ [v_2]^B\ \cdots\ [v_r]\ [0_{\mathbb{V}}]^B\ \cdots\ [0_{\mathbb{V}}]^B\ ] = [\ e_1\ e_2\ \cdots\ e_r\ 0_{\mathbb{K}^n}\ \cdots\ 0_{\mathbb{K}^n}] = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0_{r\times n-r} \\ 0_{n-r\times r} & 0_{n-r\times n-r} \end{bmatrix}.$$

De la misma manera, en el ejercicio anterior, vimos que $\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}(v) = v$ si $v \in \mathcal{S}_1$ y $\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}(v) = -v$, si $v \in \mathcal{S}_2$.

Entonces $\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}(v_i) = v_i$, para todo $i = 1, 2, \cdots, r$ y $\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}(v_i) = -v_i$ para todo $i = r+1, r+2, \cdots, n$. Por lo tanto, por definición de $[\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]_B^B$, tenemos que

$$[\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]_B^B = [\ [\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}(v_1)]^B\ [\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}(v_2)]^B \cdots\ [\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}(v_r)]^B\ [\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}(v_{r+1})]^B\ \cdots\ [\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}(v_n)]^B\ ] =$$

$$= [\ [v_1]^B\ [v_2]^B\ \cdots\ [v_r]\ [-v_{r+1}]^B\ \cdots\ [-v_n]^B\ ] = [\ e_1\ e_2\ \cdots\ e_r\ \ -e_{r+1}\ \cdots\ -e_n] =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0_{r\times n-r} \\ 0_{n-r\times r} & -I_{n-r\times n-r} \end{bmatrix}.$$

$\square$

Ejercicio 25: En cada uno de los siguientes casos, hallar la matriz respecto de la base canónica de las transformaciones lineales indicadas:

b) La proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $gen\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$ en la dirección, $gen\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \}$.

c) La simetría de $\mathbb{R}_2[x]$ con respecto a $gen\{1, x\}$ en la dirección $gen\{1 + x + x^2\}$.

Dem. b): Con la notación de la definición de $\Pi_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}$, tenemos que $\mathcal{S}_1 = gen\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$ y $\mathcal{S}_2 = gen\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \}$. Observar que como $\mathbb{R}^3 = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$, tenemos que $B := \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Entonces, por la Proposición 1, se sigue que

$$[\Pi_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]_B^B = \begin{bmatrix} I_{2\times 2} & 0_{2\times 1} \\ 0_{1\times 2} & 0_{1\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si $E = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, el ejercicio nos pide $[\Pi_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]_E^E$. Entonces, como tenemos $[\Pi_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]_B^B$, sólo nos resta hacer un cambio de base. Si

$$[M]_B^E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

denota la matriz de cambio de base de B a E, tenemos que

$$[\Pi_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]_E^E = [M]_B^E\ [\Pi_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]_B^B\ [M]_E^B = [M]_B^E\ [\Pi_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]_B^B\ ([M]_B^E)^{-1}.$$

Finalmente, como $([M]_B^E)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tenemos que

$$[\Pi_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]_E^E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observar que $(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix})^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Este hecho no es casualidad, después veremos que si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es un proyector, siempre vale que

$$([T]_B^B)^2 = [T]_B^B, \text{ para cualquier base } B \text{ de } \mathbb{V}.$$

c): Con la notación de la definición de $\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}$, tenemos que $\mathcal{S}_1 = gen\{1, x\}$ y $\mathcal{S}_2 = gen\{1+x+x^2\}$. Observar que como $\mathbb{R}_2[x] = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$, tenemos que $B' := \{1, x, 1+x+x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$. Entonces, por la Proposición 1, se sigue que

$$[\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix} I_{2\times 2} & 0_{2\times 1} \\ 0_{1\times 2} & -I_{1\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si $E' = \{1, x, x^2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$, el ejercicio nos pide $[\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]_{E'}^{E'}$. Entonces, como tenemos $[\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]_{B'}^{B'}$, sólo nos resta hacer un cambio de base. Si

$$[M]_{B'}^{E'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

denota la matriz de cambio de base de B' a E', tenemos que

$$[\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]_{E'}^{E'} = [M]_{B'}^{E'}\ [\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]_{B'}^{B'}\ [M]_{E'}^{B'} = [M]_{B'}^{E'}\ [\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]_{B'}^{B'}\ ([M]_{B'}^{E'})^{-1}.$$

Finalmente, como $([M]_{B'}^{E'})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tenemos que

$$[\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]_{E'}^{E'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Observar que $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{3\times 3}$. Este hecho no es casualidad, después veremos que si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es una simetría, siempre vale que

$$([S]_B^B)^2 = I_{\dim(\mathbb{V})\times\dim(\mathbb{V})}, \text{ para cualquier base } B \text{ de } \mathbb{V}.$$

$\square$

Ejercicio : Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n (finita) y $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ dos subespacios complementarios de $\mathbb{V}$, es decir

$$\mathbb{V} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2.$$

Entonces, para cualquier base B de $\mathbb{V}$ se sigue que

$$([\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}]_B^B)^2 = [\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}]_B^B \quad \text{y} \quad ([\Sigma_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}]_B^B)^2 = I_{n\times n}.$$

Dem. Recordar que la semana pasada vimos que si $v \in \mathbb{V}$, tenemos que

$$[\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v)]^B = [\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}]_B^B\ [v]^B.$$

En el **Ejercicio 24 item d)**, vimos que $\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$ es idempotente, es decir $\Pi^2_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2} = \Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}$. Entonces, por un lado, tenemos que

$$[\Pi^2_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v)]^B = [\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v)]^B = [\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}]_B^B\ [v]^B$$

y, por otro lado,

$$[\Pi^2_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v)]^B = [\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v))]^B = [\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}]_B^B\ [\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v)]_B^B =$$

$$= [\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}]_B^B\ [\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}]_B^B\ [v]^B = ([\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}]_B^B)^2[v]^B.$$

Igualando las dos expresiones anteriores, nos queda que

$$([\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}]_B^B)^2\ [v]^B = [\Pi^2_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v)]^B = [\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}]_B^B\ [v]^B.$$

Es decir, tenemos que

$$([\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}]_B^B)^2\ [v]^B = [\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}]_B^B)[v]^B,$$

para todo $v \in \mathbb{V}$. Recordar que si dos matrices A y B son tales que $A[v]^B = B[v]^B$ para todo $v \in \mathbb{V}$, entonces $A = B$. Usando, este hecho, concluimos que

$$([\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}]_B^B)^2 = [\Pi_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}]_B^B.$$

Finalmente, en el **Ejercicio 24 item e)**, vimos que $\Sigma^2_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2} = I_{\mathbb{V}}$. Entonces, por un lado, tenemos que

$$[\Sigma^2_{\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2}(v)]^B = [I_{\mathbb{V}}(v)]^B = [v]^B$$

y, por otro lado,

$$[\Sigma^2_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}(v)]^B = [\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}(\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}(v))]^B = [\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]^B_B\ [\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}(v)]^B_B =$$

$$= [\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]^B_B\ [\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]^B_B\ [v]^B = ([\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]^B_B)^2 [v]^B.$$

Igualando las dos expresiones anteriores, nos queda que

$$([\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]^B_B)^2\ [v]^B = [\Sigma^2_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}(v)]^B = [v]^B = I_{n\times n}\ [v]^B.$$

Es decir tenemos que $([\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]^B_B)^2\ [v]^B = I_{n\times n}\ [v]^B$, para todo $v \in \mathbb{V}$. Entonces, se sigue que

$$([\Sigma_{\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}]^B_B)^2 = I_{n\times n}.$$

$\square$

El siguiente ejercicio recolecta varias propiedades de proyectores y simetrías. Vamos a resolverlo item por item.

Ejercicio 27 a) Verificar las siguientes afirmaciones:

a) Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2 = T$, entonces T es la proyección de $\mathbb{V}$ sobre $Im(T)$ en la dirección de $Nu(T)$ es decir

$$T = \Pi_{Im(T),\ Nu(T)}.$$

Este ejercicio nos está pidiendo indirectamente que probemos que

$$\mathbb{V} = Im(T) \oplus Nu(T),$$

que es cuando está definido el proyector $\Pi_{Im(T),\ Nu(T)}$ (tal como vimos más arriba). Si probamos eso, luego veremos que $T = \Pi_{Im(T),\ Nu(T)}$.

Vamos a ver entonces que $\mathbb{V} = Im(T) \oplus Nu(T)$, usando como hipótesis que $T^2 = T \circ T = T$.

Primero veamos que $Im(T) \cap Nu(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$. Supongamos que $v \in Im(T) \cap Nu(T)$, entonces por un lado $T(v) = 0_{\mathbb{V}}$ y por el otro $v \in Im(T)$.

Como $v \in Im(T)$ existe $u \in \mathbb{V}$ tal que $v = T(u)$ entonces, usando que $T \circ T = T$, se sigue que

$$v = T(u) = T(T(u)) = T(v).$$

Acabamos de demostrar un hecho importante (usando como hipótesis $T^2 = T$):

$$\text{si } v \in Im(T) \text{ entonces } T(v) = v.$$

Siguiendo con la demostración, teníamos que $T(v) = 0_{\mathbb{V}}$ (porque $v \in Nu(T)$), entonces

$$v = T(v) = 0_{\mathbb{V}},$$

por lo tanto $Im(T) \cap Nu(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$ e $Im(T)$ y $Nu(T)$ están en suma directa.

Sólo resta ver que $\mathbb{V} = Im(T) \oplus Nu(T)$, es decir queremos ver que, dado $v \in \mathbb{V}$ existen $v_1 \in Im(T)$ y $v_2 \in Nu(T)$ tales que

$$v = v_1 + v_2.$$

Observar que siempre vale que

$$v = T(v) + (v - T(v)),$$

donde $T(v)$ claramente pertenece a $Im(T)$. Si podemos probar que $v - T(v) \in Nu(T)$, entonces habremos probado que $\mathbb{V} = Im(T) \oplus Nu(T)$. De hecho,

$$T(v - T(v)) = T(v) - T(T(v)) = T(v) - T^2(v) = T(v) - T(v) = 0_{\mathbb{V}}.$$

Por lo tanto, concluimos que $v - T(v) \in Nu(T)$ y como a v lo escribimos como $v = v_1 + v_2$, con $v_1 := T(v) \in Im(T)$ y $v_2 := v - T(v) \in Nu(T)$, se sigue que

$$\mathbb{V} = Im(T) \oplus Nu(T).$$

Por lo tanto, está definido el proyector $\Pi_{Im(T),\ Nu(T)}$.

Por otra parte, si $v \in Im(T)$ vimos arriba que $T(v) = v$ y (obviamente) $T(v) = 0_{\mathbb{V}}$ si $v \in Nu(T)$. Entonces, como $\Pi_{Im(T),\ Nu(T)}$ es la única transformación lineal tal que $\Pi_{Im(T),\ Nu(T)}(v) = v$, si $v \in Im(T)$ y $\Pi_{Im(T),\ Nu(T)}(v) = 0_{\mathbb{V}}$, si $v \in Nu(T)$ (lo probamos en el **Ejercicio 24 a**), tenemos que $T = \Pi_{Im(T),\ Nu(T)}$.

b) Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2 = T$, entonces $S := I_{\mathbb{V}} - 2T$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$.

Como $T^2 = T$, por el item a), tenemos que $T = \Pi_{Im(T),\ Nu(T)}$. Entonces

$$S = I_{\mathbb{V}} - 2T = I_{\mathbb{V}} - 2\Pi_{Im(T),\ Nu(T)} = \Sigma_{Nu(T),\ Im(T)}$$

y se puede aplicar el **Ejercicio 24 e)** para concluir que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$.

c) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces $T := \frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)$ es tal que $T^2 = T$.

De hecho,

$$\begin{aligned} T^2 = T \circ T = \frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S) \circ \frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S) = \frac{1}{4}[(I_{\mathbb{V}} - S) \circ (I_{\mathbb{V}} - S)] = \\ = \frac{1}{4}(I_{\mathbb{V}} \circ I_{\mathbb{V}} - I_{\mathbb{V}} \circ S - S \circ I_{\mathbb{V}} + S \circ S) = \frac{1}{4}(I_{\mathbb{V}} - 2S + S^2) = \\ = \frac{1}{4}(I_{\mathbb{V}} - 2S + I_{\mathbb{V}}) = \frac{1}{4}(2I_{\mathbb{V}} - 2S) = \frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S) = T, \end{aligned}$$

donde usamos la hipótesis $S^2 = I_{\mathbb{V}}$.

Otra forma de probar este hecho es verificando que $T^2(v) = T(v)$, para todo $v \in \mathbb{V}$.

d) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces S es la simetría de $\mathbb{V}$ con respecto a $Im(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S))$ en la dirección de $Nu(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S))$.

Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, usando el ítem c), vimos que si definimos $T := \frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)$, entonces $T^2 = T$. Por otra parte, por el ítem b), como $T^2 = T$, probamos que

$$I_{\mathbb{V}} - 2T = \Sigma_{Nu(T),\ Im(T)}.$$

Ahora, reemplacemos por la definición de T en la igualdad anterior. Por un lado,

$$I_{\mathbb{V}} - 2T = I_{\mathbb{V}} - 2(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)) = I_{\mathbb{V}} - I_{\mathbb{V}} + S = S$$

y, por el otro lado, $Nu(T) = Nu(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S))$ e $Im(T) = Im(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S))$. Entonces

$$S = I_{\mathbb{V}} - 2T = \Sigma_{Nu(T),\ Im(T)} = \Sigma_{Nu(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)),\ Im(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S))}.$$

Entonces S es la simetría de $\mathbb{V}$ respecto a $Nu(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S))$ en la dirección $Im(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S))$ (en la guía hay un error).

e) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces

$$\mathbb{V} = Nu(S - I_{\mathbb{V}}) \oplus Nu(S + I_{\mathbb{V}}).$$

Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, usando el ítem c), vimos que si definimos $T := \frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)$ entonces $T^2 = T$. Como $T^2 = T$, por el ítem a) tenemos, que

$$\mathbb{V} = Nu(T) \oplus Im(T) = Nu(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)) \oplus Im(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)).$$

Observar que si L es una transformación lineal y $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ (un escalar no nulo), siempre vale que

$$Nu(aL) = Nu(L).$$

La prueba es muy simple, pero la vamos a hacer. Fijense que si $v \in Nu(aL)$, entonces $aL(v) = 0_{\mathbb{V}}$, como $a \neq 0$, se sigue que $L(v) = \frac{1}{a}\ aL(v) = \frac{1}{a}\ 0_{\mathbb{V}} = 0_{\mathbb{V}}$ y entonces $v \in Nu(L)$. Recíprocamente, si $v \in Nu(L)$ entonces, $L(v) = 0_{\mathbb{V}}$ y claramente $aL(v) = a0_{\mathbb{V}} = 0_{\mathbb{V}}$, entonces $v \in Nu(aL)$ y concluimos que $Nu(aL) = Nu(L)$.

Usando la idea anterior, se sigue que $Nu(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)) = Nu(T) = Nu(I_{\mathbb{V}} - S)$.

Ahora, veamos que

$$Im(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)) = Im(T) = Nu(I_{\mathbb{V}} + S).$$

De hecho, si $v \in Im(T)$, como $T^2 = T$, en el item a) probamos que eso implica que $T(v) = v$. Entonces, reemplazado por la definición de T, nos queda

$$v = T(v) = \frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)v = \frac{1}{2}(v - Sv).$$

Entonces

$$(I_{\mathbb{V}} + S)(v) = (I_{\mathbb{V}} + S)(\frac{1}{2}(v - Sv)) = \frac{1}{2}[v - Sv + Sv - S^2 v] = \frac{1}{2}[v - I_{\mathbb{V}}(v)] = \frac{1}{2}[v - v] = 0_{\mathbb{V}},$$

donde usamos que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$. Por lo tanto $Im(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)) \subseteq Nu(I_{\mathbb{V}} + S)$.

Finalmente, si $v \in Nu(I_{\mathbb{V}} + S)$, entonces $(I_{\mathbb{V}} + S)(v) = v + S(v) = 0_{\mathbb{V}}$, es decir $S(v) = -v$. Como $T := \frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)$, entonces $S = I_{\mathbb{V}} - 2T$. Por lo tanto

$$-v = S(v) = (I_{\mathbb{V}} - 2T)v = v - 2T(v),$$

entonces, $-2v = -2T(v)$, o lo que es lo mismo, $v = T(v)$, entonces $v \in Im(T) = Im(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S))$ es decir probamos que $Nu(\mathbb{V} + S) \subseteq Im(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S))$. Por lo tanto, vale que $Im(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)) = Im(T) = Nu(I_{\mathbb{V}} + S)$ y entonces

$$\mathbb{V} = Nu(T) \oplus Im(T) = Nu(I_{\mathbb{V}} - S) \oplus Nu(I_{\mathbb{V}} + S).$$

Las siguientes son algunas conclusiones que podemos obtener del **Ejercicio 27.**

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, entonces

$$T \text{ es un proyector si y sólo si } T^2 = T \circ T = T.$$

En este caso, se cumplen las siguientes propiedades:

- $T = \Pi_{Im(T),\ Nu(T)}$, es decir, T es la proyección de $\mathbb{V}$ sobre $Im(T)$ en la dirección de $Nu(T)$.
- $T(v) = v$ si y sólo si $v \in Im(T)$.
- $\mathbb{V} = Im(T) \oplus Nu(T)$.

Ejercicio de examen: Sea $\mathbb{V}$ un K-espacio vectorial y sean $f, g : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ dos proyectores. Mostrar que:

a) $f = g$ si y sólo si $Im(f) = Im(g)$ y $Nu(f) = Nu(g)$. Es decir un proyector queda unívocamente definido conociendo su núcleo e imagen.

b) En general el ítem $a)$ no vale si f y g son transformaciones lineales pero f ó g no son proyectores.

c) Si f y g conmutan (es decir $f \circ g = g \circ f$) entonces $f \circ g$ es un proyector tal que $Im(f \circ g) = Im(f) \cap Im(g)$ y $Nu(f \circ g) = Nu(f) + Nu(g)$.

Dem. Por lo que acabamos de ver, como f y g son proyectores entonces f y g son transformaciones lineales de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ tales que $f \circ f = f$ y $g \circ g = g$.

(a) Si $f = g$ entonces obviamente tenemos que $Im(f) = Im(g)$ y $Nu(f) = Nu(g)$.

Recíprocamente, acabamos de ver que si f es un proyector, entonces $f = \Pi_{Im(f),\ Nu(f)}$, y además si g es un proyector, entonces $g = \Pi_{Im(g),\ Nu(g)}$. Usando que $Im(f) = Im(g)$ y $Nu(f) = Nu(g)$, se sigue que $f = \Pi_{Im(f),\ Nu(f)} = g$.

(b) Por ejemplo, tomar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f = id_{\mathbb{R}^2}$ (la función identidad de $\mathbb{R}^2$) y tomar $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida en una base de $\mathbb{R}^2$ por:

$$g(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad g(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces g no es proyector, pues $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in Im(g)$ pero $g(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Además $Im(f) = Im(g) = \mathbb{R}^2$ y $Nu(f) = Nu(g) = \{0\}$. Pero $f \neq g$. Pues, por ejemplo, $f(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq g(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})$.

(c) Primero observar que $f \circ g$ es una transformación lineal y

$$(f \circ g) \circ (f \circ g) = f \circ (g \circ f) \circ g = f \circ (f \circ g) \circ g = (f \circ f) \circ (g \circ g) = f \circ g.$$

Entonces $f \circ g$ es un proyector.

Siempre vale que $Im(f \circ g) \subseteq Im(f)$ y $Im(g \circ f) \subseteq Im(g)$. Entonces $Im(f \circ g) = Im(g \circ f) \subseteq Im(f) \cap Im(g)$. Si hay dudas sobre este hecho, se recomienda hacer la demostración como ejercicio.

Por otra parte, si $x \in Im(f) \cap Im(g)$, entonces $x \in Im(f)$ y $x \in Im(g)$. Entonces, como f y g son proyectores, se sigue que $x = f(x)$ y $x = g(x)$. Entonces,

$$x = f(x) = f(g(x)) = f \circ g(x).$$

Por lo tanto $x \in Im(f \circ g)$ y se sigue que $Im(f) \cap Im(g) \subseteq Im(f \circ g)$. Entonces, como probamos la doble inclusión, tenemos que $Im(f \circ g) = Im(f) \cap Im(g)$.

Finalmente, siempre vale que $Nu(f) \subseteq Nu(g \circ f) = Nu(f \circ g)$ y $Nu(g) \subseteq Nu(f \circ g)$. Entonces, tenemos que $Nu(f) + Nu(g) \subseteq Nu(f \circ g)$. De hecho, si $z \in Nu(f) + Nu(g)$, entonces $z = z_1 + z_2$, con $z_1 \in Nu(f)$ y $z_2 \in Nu(g)$, entonces,

$$f \circ g(z) = f \circ g(z_1 + z_2) = f \circ g(z_1) + f \circ g(z_2) = g \circ f(z_1) + f(0_{\mathbb{V}}) = g(0_{\mathbb{V}}) + 0_{\mathbb{V}} = 0_{\mathbb{V}}$$

y $z \in Nu(f \circ g)$.

Por otra parte, si $x \in Nu(f \circ g)$. Entonces, $f(g(x)) = 0$ y $g(x) \in Nu(f)$. Observar que

$$x = x - g(x) + g(x),$$

con $x - g(x) \in Nu(g)$ pues g es proyector. De hecho, $g(x - g(x))) = g(x) - g \circ g(x) = g(x) - g(x) = 0_{\mathbb{V}}$. Entonces, como escribimos a $x = x_1 + x_2$ con $x_1 := x - g(x) \in Nu(g)$ y $x_2 := g(x) \in Nu(f)$, se sigue que $x \in Nu(f) + Nu(g)$, entonces $Nu(f \circ g) \subseteq Nu(f) + Nu(g)$ y, como probamos la doble inclusión, tenemos que $Nu(f \circ g) = Nu(f) + Nu(g)$. $\square$

Rotaciones

Resolviendo el **Ejercicio 22**, podemos ver que la expresión general de la transformación lineal $R_z^\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que es la rotación de un ángulo θ en sentido antihorario del plano xy alrededor del eje z es:

$$R_z^\theta(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \text{ con } \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

La transformación lineal $R_x^\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que es la rotación de un ángulo θ en sentido antihorario del plano yz alrededor del eje x y la transformación lineal $R_y^\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que es la rotación de un ángulo θ en sentido antihorario del plano xz alrededor del eje y, se obtienen de manera similar y sus expresiones generales son:

$$R_x^\theta(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \text{ con } \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ y}$$

$$R_y^\theta(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \text{ con } \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Con esto en mente vamos a resolver el **Ejercicio 23** que tal como lo indica el símbolo radioactivo no es nada sencillo.

Ejercicio 23 : Diseñar un método, basado en las rotaciones definidas en el **Ejercicio 22**, que permita transformar el punto $[1\ 0\ 0]^T$ en cualquier otro punto de la esfera de radio 1,

$$S_1 : \{[x\ y\ z]^T :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Utilizando esa metodología elaborar un sistema de instrucciones que permita asir un objeto situado en el punto $[\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ 0]^T$ y trasladarlo hasta el punto $[\frac{\sqrt{3}}{3}\ \frac{\sqrt{3}}{3}\ \frac{\sqrt{3}}{3}]^T$.

Para resolver este ejercicio, vamos usamos las siguientes propiedades trigonometricas:

- $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$.
- $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$.

También, vamos usar las coordenadas polares de un vector $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ en el plano: las coordenadas polares del vector $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ están dadas por su distancia al origen $r > 0$ y su ángulo (respecto del eje al que pertenece la componente u_1) $\phi \in (-\pi, \pi]$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

donde $r := (u_1^2 + u_2^2)^{1/2}$ y $\phi = \arccos(\frac{u_1}{r})$ si $u_2 \geq 0$ ó $\phi = -\arccos(\frac{u_1}{r})$ si $u_2 < 0$.

Vamos a resolver el ejercicio de manera abstracta para entenderlo mejor y luego vamos a resolver de manera específica lo que nos piden.

La idea del ejercicio es tomar un punto $u = [u_1\ u_2\ u_3]^T \in S_1$ (que pertenezca a la esfera unitaria) y trasladarlo a cualquier otro punto $v = [v_1\ v_2\ v_3]^T \in S_1$ usando (únicamente) rotaciones.

Vamos a demostrar que para logar esto, necesitaremos rotar el vector u un ángulo α alrededor del eje x, y ó z y luego a dicho vector rotado lo rotaremos nuevamente un ángulo β alrededor de otro de uno los dos ejes restantes. Por ejemplo, rotaremos u un ángulo α alrededor del eje z, si llamamos u' al vector obtenido en la primera rotación de u, luego rotaremos ese vector u' un ángulo β alrededor del eje x ó y para obtener el vector v.

El orden de las rotaciones la podemos cambiar tranquilamente, pero en esta resolución vamos a demostrar cómo serían los pasos a seguir si primero rotamos u respecto del eje z y luego u' respecto del eje x ó y.

Para decidir sobre qué eje rotaremos inicialmente el vector u, debemos ver cuáles (alguna o más de una) de las siguientes situaciones tenemos:

- Si $v_1^2 \geq u_1^2$, rotaremos en primer lugar el vector u respecto del eje x.
- Si $v_2^2 \geq u_2^2$, rotaremos en primer lugar el vector u respecto del eje y.
- Si $v_3^2 \geq u_3^2$, rotaremos en primer lugar el vector u respecto del eje z.

Observar que NO puede pasar a la vez que $v_1^2 < u_1^2$, $v_2^2 < u_2^2$ y $v_3^2 < u_3^2$, por que si pasa eso, entonces

$$1 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 < u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1,$$

entonces $1 < 1$, lo cual es absurdo.

Vamos a suponer entonces que $v_3^2 \geq u_3^2$ y rotaremos en primer lugar, u respecto del eje z. Si tenemos alguno de los otros dos casos, el método que veremos se puede adaptar fácilmente y la resolución es similar.

Las incógnitas que tendremos que resolver serán:

- El ángulo α al cual rotaremos el vector u alrededor del eje z.
- Si luego rotamos el vector u' respecto del eje x o del eje y.
- El ángulo β al cual rotaremos el vector u' alrededor del eje x o del eje y.

Dem. **Paso 1:** Rotamos el vector u un ángulo α respecto del eje z. Recordar que estamos suponiendo que $v_3^2 \geq u_3^3$.

Entonces, si rotamos el vector u un ángulo α respecto del eje z, por lo que vimos en el **Ejercicio 22**, obtendremos $R_z^\alpha(u)$:

$$R_z^\alpha(u) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1\cos(\alpha) - u_2\sin(\alpha) \\ u_1\sin(\alpha) + u_2\cos(\alpha) \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = u'.$$

La pregunta que surge ahora, es cómo obtenemos el valor del ángulo α y alrededor de qué eje (si x ó y) rotaremos el vector u' el ángulo β para finalmente obtener v. Para responder esto, vamos a considerar las coordenadas polares del vector $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ en el plano xy como vimos en (2). Sean $r > 0$ y $\phi \in (-\pi, \pi]$ tales que

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{bmatrix},$$

donde $r := (u_1^2 + u_2^2)^{1/2}$ y $\phi = \arccos(\frac{u_1}{r})$ si $u_2 \geq 0$ ó $\phi = -\arccos(\frac{u_1}{r})$ si $u_2 < 0$.

Nota : Observar que estamos suponiendo que $u \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (que es el único caso que nos daría $r = 0$). Si $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, como $v_3^2 \geq u_3^2 = 1$ y $v \in S_1$, no queda otra que $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Entonces, en ese caso, para trasladar el vector u al vector v no habría que hacer nada porque son iguales.

Paso 2: Una vez calculado r (el radio de las coordenadas polares del vector $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$) y, sabiendo que v_1 (la primera coordenada del vector objetivo v) es dato, vamos a decidir si la segunda rotación es respecto del eje x o del eje y de la siguiente manera:

Si $|\frac{v_1}{r}| \leq 1$, la segunda rotación la haremos respecto del eje x y seguimos con el paso $3x$.
Si $|\frac{v_1}{r}| > 1$, la segunda rotación la tendremos que hacer respecto del eje y y seguimos con el paso $3y$.

En los pasos siguientes vamos a entender por qué tenemos que discriminar en los dos casos anteriores.

Paso 3x: Obtención de α y de β.
Tenemos que $|\frac{v_1}{r}| \leq 1$. Entonces, supongamos que ahora rotamos al vector u' (que fue el que resultó cuando rotamos el vector u un ángulo α alrededor del eje z) un ángulo β alrededor del eje x para obtener el vector objetivo que llamamos v.
Entonces:

$$R_x^\beta(u') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2'\cos(\beta) - u_3'\sin(\beta) \\ u_2'\sin(\beta) + u_3'\cos(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Entonces, como $u_1' = v_1$, reemplazando con la expresión de u_1' y las coordenadas polares de $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ que calculamos en el Paso 1, tenemos que

$$v_1 = u_1' = u_1\cos(\alpha) - u_2\sin(\alpha) = r\cos(\phi)\cos(\alpha) - r\sin(\phi)\sin(\alpha) = r\ cos(\phi + \alpha),$$

donde usamos una de las identidades trigonométricas de arriba.

Por lo tanto,
$$\frac{v_1}{r} = \cos(\phi + \alpha). \tag{3}$$
De la ecuación (3), como $|\frac{v_1}{r}| \leq 1$, podemos aplicar la función $\arccos$ y obtenemos que

$$\alpha = \arccos(\frac{v_1}{r}) - \phi.$$

Ya resolvimos dos incógnitas: obtuvimos α y decidimos que la segunda rotación será respecto del eje x. Sólo nos resta obtener β.

Observar que:

$$v_2^2 + v_3^2 = (u_2' \cos(\beta) - u_3' \sin(\beta))^2 + (u_2' \sin(\beta) + u_3' \cos(\beta))^2 = (u_2')^2 + (u_3')^2, \tag{4}$$

donde la última igualdad se sigue desarrolando los cuadrados y usando que $\sin(\beta)^2 + \cos(\beta)^2 = 1$.

A continuación, obtengamos las coordenadas polares de los vectores $\begin{bmatrix} u_2' \\ u_3' \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ esta vez en el plano yz. Sean $r, r'' > 0$ y $\phi', \tau \in (-\pi, \pi]$ tales que

$$\begin{bmatrix} u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r' \cos(\phi') \\ r' \sin(\phi') \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'' \cos(\tau) \\ r'' \sin(\tau) \end{bmatrix}.$$

Entonces, usando (4), tenemos que

$$r''^2 = v_2^2 + v_3^2 = (u_2')^2 + (u_3')^2 = r'^2.$$

Por otra parte, $\phi' = \arccos(\frac{u_2'}{r'})$ si $u_3' \geq 0$ ó $\phi = -\arccos(\frac{u_2'}{r'})$ si $u_3' < 0$ y, $\tau = \arccos(\frac{v_2}{r'})$ si $v_3 \geq 0$ ó $\tau = -\arccos(\frac{v_2}{r'})$ si $v_3 < 0$.

Por lo tanto, usando que $r'' = r'$, reemplazando con las coordenadas polares de $\begin{bmatrix} u_2' \\ u_3' \end{bmatrix}$ y de $\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ y aplicando las identidades trigonométricas que vimos arriba, obtenemos que

$$v_2 = r' \cos(\tau) = u_2' \cos(\beta) - u_3' \sin(\beta) = r' \cos(\phi') \cos(\beta) - r' \sin(\phi') \sin(\beta) = r' \cos(\phi' + \beta) \text{ y}$$

$$v_3 = r' \sin(\tau) = u_2' \sin(\beta) + u_3' \cos(\beta) = r' \cos(\phi') \sin(\beta) + r' \sin(\phi') \cos(\beta) = r' \sin(\phi' + \beta).$$

Por lo tanto, despejando, nos queda que $\tau = \phi' + \beta$, es decir

$$\beta = \tau - \phi'.$$

Entonces, habiendo obtenido α y β, concluimos que

$$v = [R_x^\beta \circ R_z^\alpha](u)$$

y obtenemos lo que queríamos.

Paso 3y: Obtención de α y de β

Si $|\frac{v_1}{r}| > 1$, la segunda rotación la tendremos que hacer respecto del eje y. Entonces,

$$R_y(u') = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_1 \cos(\beta) - u'_3 \sin(\beta) \\ u'_2 \\ u'_1 \sin(\beta) + u'_3 \cos(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Entonces, $u'_2 = v_2$ y volviendo a la expresión de u'_2 y a las coordenadas polares de $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ que calculamos en el Paso 1, tenemos que

$$v_2 = u'_2 = u_1 \sin(\alpha) + u_2 \cos(\alpha) = r \cos(\phi) \sin(\alpha) + r \sin(\phi) \cos(\alpha) = r\ cos(\phi - \alpha).$$

Por lo tanto,

$$\frac{v_2}{r} = \cos(\phi - \alpha). \tag{5}$$

Como, en este caso, $|\frac{v_1}{r}| > 1$ y de entrada estamos suponiendo que $v_3^2 > u_3^2$, no queda otra que $|\frac{v_2}{r}| \leq 1$.

Veamos por qué vale la afirmación de arriba: supongamos que no vale que $|\frac{v_2}{r}| \leq 1$, es decir que $|\frac{v_2}{r}| > 1$. Entonces, por un lado estamos suponiendo que $|\frac{v_1}{r}| > 1$, eso implica que $v_1^2 > r^2$ y, por el otro lado, como $|\frac{v_2}{r}| > 1$, tenemos que $v_2^2 > r^2$. Entonces

$$v_1^2 + v_2^2 > r^2 = u_1^2 + u_2^2.$$

Entonces, usando que inicialmente tenemos que $v_3^2 \geq u_3^2$, nos queda

$$1 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 > u_1^2 + u_2^2 + v_3^2 \geq u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1,$$

es decir, nos quedó que $1 > 1$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $|\frac{v_2}{r}| \leq 1$. Entonces, de la ecuación (5), como $|\frac{v_2}{r}| \leq 1$, podemos aplicar $\arccos$ y obtenemos que

$$\alpha = \phi - \arccos(\frac{v_2}{r}).$$

Ya resolvimos dos incógnitas: obtuvimos α y decidimos que la segunda rotación será respecto del eje y. Sólo nos resta obtener β.

A continuación, tal como hicimos arriba, obtengamos las coordenadas polares de los vectores $\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \end{bmatrix}$ en el plano xz, tales que

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r' \cos(\phi') \\ r' \sin(\phi') \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'' \cos(\tau) \\ r'' \sin(\tau) \end{bmatrix}.$$

Entonces, de la misma manera que lo vimos para el paso $3x$, podemos ver que

$$r''^2 = (v_1')^2 + (v_3')^2 = u_1^2 + u_3^2 = r'^2$$

y por otra parte, $\phi' = \arccos(\frac{u_1'}{r'})$ si $u_3' \geq 0$ ó $\phi = -\arccos(\frac{u_1'}{r'})$ si $u_3' < 0$ y, $\tau = \arccos(\frac{v_1}{r'})$ si $v_3 \geq 0$ ó $\tau = -\arccos(\frac{v_1}{r'})$ si $v_3 < 0$.

Operando de manera similar que en el paso $3x$, obtenemos

$$\beta = \tau - \phi'.$$

Entonces,

$$v = [R_y^\beta \circ R_z^\alpha](u).$$

$\square$

Ahora sí, vamos a resolver el **Ejercicio 23**, aplicando los pasos que vimos arriba.

Ejmplo 1: En este caso, $u = [\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ 0]^T$ y vamos a trasladarlo hasta el punto $v = [\frac{\sqrt{3}}{3}\ \frac{\sqrt{3}}{3}\ \frac{\sqrt{3}}{3}]^T$. Observar que $v_3^2 = \frac{3}{9} > 0 = u_3^2$. Entonces, tal como vimos, primero vamos a rotar al vector u un ángulo α respecto del eje z.

Para obtener α, primero tenemos que calcular las coordenadas polares del vector $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ en el plano xy. En este caso

$$r = ((\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2)^{1/2} = 1$$

y como $u_2 \geq 0$,

$$\phi = \arccos(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}) = \frac{\pi}{4}.$$

Por otra parte, como $|\frac{v_1}{r}| = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$, la segunda rotación la haremos alrededor del eje x y además

$$\alpha = \arccos(\frac{v_1}{r}) - \phi = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{3}) - \frac{\pi}{4}.$$

Para no escribir tanto, llamemos $a = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{3})$ y $b = \frac{\pi}{4}$. Entonces, $\cos(b) = \sin(b) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(a) = \cos(\arccos(\frac{\sqrt{3}}{3})) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\sin(a) = \sin(\arccos(\frac{\sqrt{3}}{3})) = (1 - (\frac{\sqrt{3}}{3})^2)^{1/2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Usando las identidades trigonométricas de arriba, observar que

$$\cos(\alpha) + \sin(\alpha) = \cos(a-b) + \sin(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{3} + \sin(a) + \sin(a) - \frac{\sqrt{3}}{3}) = \sqrt{2}\ \sin(a) = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\cos(\alpha) - \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}[\frac{\sqrt{3}}{3} + \sin(a) - (\sin(a) - \frac{\sqrt{3}}{3})] = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Entonces, usando la expresión del Paso 1, calculemos u_1', u_2' y u_3' sabiendo que, en este caso, $u_1 = u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Entonces,

$$u_1' = u_1 \cos(\alpha) - u_2 \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\alpha) - \sin(\alpha)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{6}}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$u_2' = u_1 \sin(\alpha) + u_2 \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\alpha) + \sin(\alpha)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ y}$$

$$u_3' = u_3 = 0.$$

Sólo nos restan obtener las coordenadas polares de los vectores $\begin{bmatrix} u_2' \\ u_3' \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ en el plano yz. En este caso,

$$r' = [(u_2')^2 + (u_3')^2]^{1/2} = [(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^2]^{1/2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

y por otra parte, como $u_3 = 0$, tenemos que $\phi' = 0$ y, como $v_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \geq 0$, tenemos que $\tau = \arccos(\frac{v_2}{r'}) = \arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$.

Entonces

$$\beta = \tau - \phi' = \frac{\pi}{4}.$$

Por lo tanto,

$$v = R_x^{\frac{\pi}{4}} \circ R_z^{\arccos(\frac{\sqrt{3}}{3}) - \frac{\pi}{4}}(u)$$

y obtuvimos v con una rotación del vector u un ángulo $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{3}) - \frac{\pi}{4}$ alrededor del eje z y luego una rotación un ángulo $\frac{\pi}{4}$ alrededor del eje x.

Ejemplo 2:

Supongamos que $u = [1\ 0\ 0]^T$ y $v = [0\ 1\ 0]^T$. Entonces, como $v_3^2 = 0 = u_3^2$, podemos rotar al vector u un ángulo α respecto del eje z.

Para obtener α, primero tenemos que calcular las coordenadas polares del vector $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en el plano xy. Pero en este caso, es muy simple ver que, $r = 1$ y $\phi = 0$.

Entonces, como $|\frac{v_1}{r}| = 0 \leq 1$, tenemos que la segunda rotación la haremos alrededor del eje x. Además

$$\alpha \arccos(\frac{v_1}{r}) - \phi = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

En este caso, tenemos que $u_2' = u_1 \sin(\alpha) + u_2 \cos(\alpha) = \sin(\alpha) = 1$ y $u_3' = u_3 = 0$. Observemos que con esta rotación alrededor del eje z, ya obtuvimos el vector objetivo v. Si el método que desarrollamos es correcto, la siguiente rotación alrededor del eje x debería ser de un ángulo 0 (es decir no hay que rotar nada).

Calculemos las coordenadas polares de los vectores $\begin{bmatrix} u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en el plano yz. En este caso,

$$r' = [(u_2')^2 + (u_3')^2]^{1/2} = |u_2'| = [v_2^2 + v_3^2]^{1/2} = 1$$

y por otra parte, como $u_3 = 0$, tenemos que $\phi' = 0$ y, como $v_3 = 0$, tenemos que $\tau = \arccos(\frac{v_2}{r'}) = \arccos(1) = 0$.

Entonces, como sospechábamos
$$\beta = \tau - \phi' = 0.$$

Por lo tanto
$$v = R_x^0 \circ R_z^{\frac{\pi}{2}}(u) = R_z^{\frac{\pi}{2}}(u).$$